A. PASTORE

SULLA NATURA EXTRALOGICA DELLE LEGGI DI TAUTOLOGIA E DI ASSORBIMENTO NELLA LOGICA MATEMATICA

Prima di LEIBNIZ la Matematica e la Logica vivevano in due campi disparati e lontani. Poi, in seguito alle geniali intuizioni di quella vasta mente di filosofo e di matematico, la Logica si avvicinò risolutamente alla Matematica, e l'avvicinamento progressivo continuò per opera di successori i quali scoprirono le numerose e feconde analogie donde trasse origine la Logica matematica. Questo indirizzo ha già una vasta letteratura che qui è inutile esporre.

Ciò premesso, sorge naturale la domanda: dove ci porterà questo lento ma continuo avvicinamento dei due calcoli? Notiamo subito che, contro la tesi della loro fusione definitiva, si oppone un gruppo di ragioni che ha, per lo meno, il vantaggio della tradizione. È noto infatti che quasi tutti i matematici, che contribuirono maggiormente al progresso del calcolo logico, si fanno un dovere di introdurre un sistema speciale di segni per trattare le interessanti questioni relative alla Logica deduttiva, pur riconoscendo che questa fa parte delle scienze matematiche, e malgrado la grande analogia presentata dalle operazioni fondamentali dei due campi. E si capisce che i loro sforzi sono ispirati dal desiderio di impedire una fusione possibile dei due calcoli, che, a prima giunta, ha l'apparenza d'una confusione.

Frattanto si presenta un fatto nuovo. Indipendentemente dalle aspirazioni accennate, tanto il calcolo matematico quanto il calcolo logico, intesi a perfezionare i proprj metodi, vanno sempre più assumendo un carattere di estrema generalità, in cui alla crescente purezza formale delle nozioni si accompagna il crescente rigore deduttivo dei ragionamenti. Ciò significa che i due calcoli, malgrado le loro presunte differenze, funzionano in realtà come due sistemi ipotetico-deduttivi, intimamente congiunti nell'impiego d'un procedimento comune.

Questo fatto, il quale si può considerare come un acquisto recente, è tanto grave e inaspettato che impone la necessità di elencare e discutere colla massima brevità (e quindi efficacia) tutte le ragioni che attualmente si adducono per impedire il riconoscimento dell'identità fondamentale dei due calcoli.

Digitized by Google

Mi limito ora ad osservare che la ragione più forte si ricava dall'affermazione che alcune operazioni fondamentali del calcolo logico non hanno le corrispondenti nel calcolo matematico o differiscono notevolmente nelle loro proprietà. Per esempio, si afferma che le proprietà espresse dalle seguenti identità, in generale

$$aa = a \ , \ a \cup a = a$$

pel prodotto e per la somma, non hanno le corrispondenti in Algebra numerica (1), sebbene di queste formole si faccia continuo uso nell'Algebra della logica, la quale, priva così dei multipli e delle potenze, riceve una semplificazione enorme rispetto all'Algebra numerica (2). La legge rappresentata da queste formole fu dal JEVONS (3) chiamata *the law of simplicity*, da altri la legge di tautologia (4); da questa deriva la legge di assorbimento (5)

$$a(a \cup b) = a \ , \ a \cup (ab) = a \, ,$$

e un gruppo vastissimo di conseguenze che costrinsero il calcolo logico a diffondersi

(1) G. BOOLE [*The calculs of logic* (Cambridge and Dublin math. Journal, 1848, V. III, pp. 183-198); *An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities* (London, Walten et Maberly, 1854)] afferma che le due equazioni

$$aa = a \quad | \quad a + a = a$$

sono caratteristiche del calcolo logico. La sua dottrina ebbe gran seguito nella scuola inglese, scozzese e americana. Nel '72 ROBERT GRASSMANN affrontando, con criterj originali, questo argomento, pubblicò le sue ricerche nella Wissenschaftlehre oder Philosophie, Stettin. È noto che egli divide la matematica in quattro rami distinti: 1) la « Begriffslehre » (logica); 2) la « Bindelehre » (teoria delle combinazioni); 3) la « Zahlenlehre » (aritmetica); 4) l'« Ausdehnungslehre » e riduce le proprietà caratteristiche di queste quattro discipline ai diversi modi coi quali si connettono fra loro eguali elementi. (Verknüpfungsarten gleicher Stiften) nella « Fügung » (addizione) e nella « Webung » (moltiplicazione) di tali elementi, come mostra il prospetto seguente;

$$\left.\begin{matrix} e+e=e \\ ee=e \end{matrix}\right\}(1) \qquad \left.\begin{matrix} e+e=e \\ ee \neq e \end{matrix}\right\}(2) \qquad \left.\begin{matrix} e+e \neq e \\ ee=e \end{matrix}\right\}(3) \qquad \left.\begin{matrix} e+e \neq e \\ ee \neq e \end{matrix}\right\}(4).$$

G. PEANO [*Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di* GRASSMANN, *preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* (Torino, Bocca, 1888)], dichiara che le operazioni riferite, le quali sono fondamentali al calcolo logico, non hanno le corrispondenti nel calcolo logico. In « F_3 N 1 » [*Logique mathématique* (Turin, Bocca, 1897, p. 35)] nota che la proprietà della moltiplicazione logica espressa dalla P 42 ($a = aa$) rende le formule logiche più semplici che le algebriche.

(2) L. COUTURAT, *L'Algèbre de la logique* (Paris, Gauthier-Villars, Ed. 1905, p. 13).

(3) W. S. JEVONS, *The principles of science, a treatise on logic and scientific method* (London, 1883).

(4) A. NAGY, *Fondamenti del calcolo logico* (Napoli, 1890, Pellerano); *Principj di logica esposti secondo le dottrine moderne* (Torino, Loescher, 1892). A p. 47 e segg. di quest'opera la legge di tautologia viene indicata in generale coll'espressione seguente:

$$\Pi a = a \quad | \quad \Sigma a = a.$$

(5) E. SCHRÖDER chiama le due equazioni: $a = a + ab$, $a = a(a + b)$ « Absorptions gesetz ». Cfr. *insup.* NAGY, *Principj* ecc., p. 48, e *Fondamenti* ecc., p. 3; COUTURAT, op. cit., p. 13.

Digitized by Google

con relativa lentezza e fecero sì che anche le applicazioni della Matematica alla Logica pura siano ancora oggidì avversate da troppi logici e matematici.

Lo scopo della presente comunicazione è di portare un contributo diretto alla tesi dell'identità fondamentale dei due calcoli:

1° dimostrando che tutte le apparenti dimostrazioni che furono date finora di tali leggi si riducono ad una mera trasformazione descrittiva di concetti, cioè sono logicamente insussistenti;

2° riconoscendo che la concezione stessa di queste leggi assunte come primitive o ha natura extralogica o non può essere pensata come compatibile col principio fondamentale dell'identità;

3° indicando le più elementari applicazioni che vengono suggerite in conseguenza.

I.

Esaminiamo in primo luogo le dimostrazioni, limitandoci a citare le più importanti, per amore di brevità.

Giova ricordare che l'autorità della tesi tautologica rimonta a LEIBNIZ il quale dichiarò esplicitamente: « *repetitio ejusdem literae in eodem termino est inutilis* » (1) quanto al prodotto, e « *si idem secum ipso sumatur nihil constituitur novum, seu* $A + A \infty A$ » (2) quanto alla somma.

In seguito quasi tutte le scuole di logica matematica: l'inglese (HAMILTON, BOOLE, CLIFFORD, JEVONS, VENN, ecc.), l'americana (HALSTED, PEIRCE), la tedesca (SCHRÖDER, H. e R. GRASSMANN, FREGE), l'italiana (PEANO, NAGY, BURALI-FORTI, ecc.), la francese (COUTURAT), la russa (PORETZKY), accettarono questi principj. Tutte le dimostrazioni poi che furono escogitate si riducono, a quanto mi risulta, malgrado la deplorevole anarchia di notazioni, alle due forme seguenti, riprodotte, con poche modificazioni, dai varj autori (3).

Nella prima forma (4) si dimostra, in primo luogo, la Proposizione

[1] $$a \supset aa ,$$

al quale scopo prima si moltiplicano fra loro le due deduzioni $a \supset a$ e $a \supset a$; quindi si compongono secondo le nota formola di Composizione:

$$a \supset b \,.\, a \supset c : \supset : a \supset bc ,$$

quindi si deduce la Ths.

In secondo luogo, in virtù della definizione dell'eguaglianza, da

$$aa \supset a \,.\, a \supset aa ,$$

(1) LEIBNIZ, *PhilS.*, t. 7, p. 224. Cfr. PEANO, F_2 N3, pp. 14, 41.

(2) Id., Mss. *Phil.* VII, p. 3.

(3) Vedi p. es. il COUTURAT che, in op. e loc. cit. ripete la stessa dimostrazione del PEANO, ma adoperando la relazione d'inclusione col segno $<$.

(4) G. PEANO, F_2N1: P31: $a \supset aa$ [Hp . P21 . P21 . $\supset$. $a \supset a$. $a \supset a$. Cmp . $\supset$. Ths.
P42: $a = aa$ [P23 $\cap$ P31 . $\supset$. P.]. La P23 è: $a, b \in K . \supset . ab \supset a$.

Digitized by Google

in cui la $aa \supset a$ è tratta da $ab \supset a$), per $(a|b)$, si deduce la proposizione tautologica

[2] $$a = aa.$$

E analogamente si ragiona per la somma.

Quanto infine alla legge di assorbimento

$$a(a \cup b) = a \ , \ a \cup (ab) = a$$

si capisce che la sua sorte dipende dalle formole di Cmp e di Smp che furono già impiegate precedentemente e saranno esaminate fra poco.

Ora si vede che la dimostrazione della [1] è subordinata alla condizione che si possa sostituire $(a, a, a \mid a, b, c)$ nella formola del Cmp

$$a \supset b \,.\, a \supset c : \supset : a \supset bc,$$

affinchè le due deduzioni $a \supset a$ e $a \supset a$ si possano comporre per la deduzione della Ths. Ma è chiaro che tale sostituzione (di termini tutti eguali ad un dato termine a nella formola del Cmp che contiene termini differenti) non si può fare perchè, con essa, l' Hp diventerebbe

$$a \supset a \,.\, a \supset a$$

da cui, in virtù della

$$aa \supset a$$

già posta antecedentemente; e per la sostituzione, in questo caso, legittima $(a \supset a \,|\, a)$ non si ricava che

$$a \supset a.$$

Dunque la tesi

$$a \supset aa$$

cade senza rimedio, e con essa la sua corrispondente per la somma, e tutto il sistema delle conseguenze legate alla legge di tautologia.

Ma c'è ancora un'altra prova contraria alla validità di codesta dimostrazione. Infatti, non solo non si può fare la sostituzione riferita nella forma del Cmp, ma neppure si può ricorrere al principio di composizione per dedurne la Ths della tautologia, perchè, rigorosamente parlando, la proposizione del Cmp non è che la stessa proposizione tautologica mascherata. Invero non si bada che la formola del Cmp la quale esprime che « se si hanno due deduzioni colla medesima Hp e per Ths il prodotto logico delle due Ths » implica già un *ὕστερον πρότερον*, vale a dire costituisce un appello manifesto a quella convenzione la quale esprime che « ripetendo più volte la medesima Hp non si ottiene mai altro che la medesima Hp ».

Digitized by Google

In una parola è necessario supporre già la validità di quella legge che si cerca in seguito di dimostrare, perchè la vera formola del Cmp non è questa

$$a \supset b \,.\, a \supset c : \supset : a \supset bc,$$

ma quest'altra

$$a \supset b \,.\, a \supset c : \supset aa \supset bc,$$

la quale si ottiene moltiplicando membro a membro la deduzione $a \supset b$ per la deduzione $a \supset c$ e dice propriamente che « dal prodotto delle Hp si deduce il prodotto delle Ths ».

Nella seconda forma (1) la proposizione

[1] $$a \supset aa$$

non è dimostrata, ma è posta immediatamente come Pp. E allora dalla affermazione simultanea

$$a \supset aa \,.\, aa \supset a,$$

in cui la p. $aa \supset a$ è ottenuta per la sostituzione $(a|b)$ nella Pp. $ab \supset a$, si deduce la Ths.

[2] $$a = aa$$

Ora anche qui si comprende che la dimostrazione del principio tautologico è logicamente insussistente, perchè la sua validità è subordinata alla Pp. [1] nella quale è giocoforza supporre già la validità di quel principio che si cerca in seguito di dimostrare.

Infatti, poichè in nessuna deduzione la Ths può essere maggiore dell'Hp (la vecchia logica esprimeva questo canone con la nota legge: « latius hos quam praemissae conclusio non vult »), segue che ponendo $a \supset aa$ noi sappiamo già che aa non può essere maggiore di a. Inoltre, poichè la deduzione $a \supset aa$ (« da a si deduce a ed a ») implica già ad evidenza come un caso particolare che « da a si deduce a », segue che aa non può essere minore di a. Ciò posto, segue di necessità che ponendo $a \supset aa$ resta già posto $a = aa$.

Questo significa, in altri termini, che anche qui la Pp $a \supset aa$ non è che la stessa proposizione tautologica mascherata.

Concludendo, si può affermare che le ordinarie dimostrazioni della proprietà tautologica sono, in sostanza, un puro complesso di convenzioni descrittive e può ritenersi che qualunque altra dimostrazione escogitabile sia, in ultima analisi, riducibile a tale significato.

(1) C. Burali-Forti, *Logica matematica* (Milano, Hoepli, 1894, p. 11; Pp2. $a \supset aa$; pag. 15 P2 . $aa \supset a$; pag. 45 P44 . $a = aa$ [Pp2 . P2 : $\supset$: P44].

Digitized by Google

II.

Ed ora passiamo al secondo punto. Ho detto che alcuni autori accettano il principio tautologico senza dimostrazione, cioè come un postulato. Per chiarezza di critica gioverà ancora distinguere questi autori in due gruppi.

Taluni si appoggiano evidentemente sopra una giustificazione che trascende la natura e i limiti della logica pura. È questo il caso tipico di S. Boezio il quale fondandosi su questo criterio « velut si dicam sol sol sol, non tres sol effecerim sed uno toties praedicaverim » (1) dà un tuffo nella teologia e nell'ontologia proponendosi di corroborare l'ardua tesi della Trinità, ed è pure il caso di tutti i sostenitori della logica a fondamento ontologico. È chiaro che il loro ragionamento si riduce a questo. L'oggetto esteriore non si moltiplica anche se noi lo pensiamo molte volte di seguito; dunque neanche si moltiplica il concetto, vale a dire ciò che corrisponde nella nostra mente ad un oggetto considerato come un reale ontologico esterno. Ma chi non vede che qui si confonde il campo logico col campo ontologico, perchè si pretende che ciò che vale ontologicamente valga anche logicamente? Questo principio può interessare solo dal punto di vista della celebre questione capitale della Scolastica che chiede: se ai concetti (generici) corrisponda un reale ontologico e di qual natura esso sia, e come si comporti cogli individui (2). Dunque il principio tautologico non è posto che per ragioni extralogiche, chiamando — per comodità — extralogico tutto ciò che non è logico (alogico, illogico, metalogico, ontologico, gnoseologico, psicologico, glottologico, ecc.).

Altri, credendo di potersi valere dell'ampia libertà conceduta alla scelta delle Pp, pongono esplicitamente il principio tautologico come un postulato, senza aggiungere alcuna giustificazione al riguardo.

Ora è della massima importanza il ricordare che solo fino ad un certo punto si può dire che la scelta delle Pp è arbitraria. Infatti da un sistema ipotetico deduttivo qualunque si deve sempre pretendere che le sue Pp siano non contraddittorie e indipendenti e conducano a risultati esclusivamente formali e necessarj.

Ma queste condizioni bastano a radiare il principio tautologico da qualsivoglia calcolo logico che non voglia sacrificare il principio di identità ($a = a$). Infatti, ponendo $aa = a$ si affermano relativamente identiche due quantità logiche fra cui passa un'innegabile diversità di contenuto e di estensione, che si può provare nel modo seguente.

Noi ammettiamo come condizione indispensabile alla purezza del calcolo logico che l'unico vero e proprio oggetto logico è il concetto il quale, per essere, non ha bisogno di esistere, perchè non ha bisogno d'altro che d'essere pensato. Da ciò risulta che,

(1) Boetius, *De Trinitate* etc., § 3. Cfr. Peano, F2 N1 . P42.

(2) Porfirio, *Isag.* Cap. 1. *αὐτίκα περὶ γενῶν τε καὶ εἰδῶν, τὸ μὲν εἴτε ὑφεστηκεν εἴτε ἐν μόναις ψιλαῖς ἐπινοίαις κεῖται, εἴτε ὑφεστεκότα σώματά ἐστιν, ἢ ἀσώματα, καὶ χωριστὰ ἢ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς, καὶ περὶ ταῦτα ὑφεστῶτα, παραιτήσομαι λέγειν, βαθυτάτης οὔσης τῆς τοιαύτης πραγματείας καὶ ἄλλης μείζονος δεομένης ἐξετάσεως.*

Digitized by Google

ponendo *aa*, sebbene il concetto del primo *a* sia identico al concetto del secondo *a*, tuttavia gli oggetti logici, cioè i concetti di cui si tratta, sono innegabilmente due, e quindi il concetto della loro affermazione simultanea è irreducibile al concetto semplice di *a* se non vogliamo smarrire i due concetti dell'unità e della moltiplicità che sono fondamentali a qualunque calcolo. Se questa distinzione fra *a* e *aa* non può esser fatta dalla sensibilità e nella realtà oggettiva esteriore, prima di tutto non è richiesta dalla logica pura, in secondo luogo è sempre fatta dalla e nella ragione, alla quale, durante l'affermazione simultanea, son presenti due oggetti logici e non uno, perchè tutte le volte che noi pensiamo un concetto, il concetto è (1).

Ogni concetto è un pensato e ogni pensato concettuale tante volte è quante volte si pensa, indipendentemente dal fatto che ad esso corrisponda o no verun oggetto reale esistente fuori del pensiero. Del pari tutte le operazioni che si possono compiere in qualsivoglia calcolo non sono altro che rapporti ideali, vale a dire ancora certi pensati fra certi altri pensati ai quali dagli spiriti coltivati nelle scienze astratte non si deve imporre limite alcuno. L'aver sempre presente una sola identità reale o un *flatus vocis* tutte le volte che noi evochiamo il concetto in diversi nessi moltiplicativi, non costituisce una sola identità logica dei molteplici concetti corrispondenti che vengono predicati nello stesso tempo, perchè solo questi predicati astratti sono i veri e proprj oggetti logici, dei quali si deve occupare la logica pura. Dunque fra *a* ed *aa* passa una diversità concettuale ed operativa assoluta e pensare come vero l'opposto di questo pensiero sarebbe un negare assurdamente la validità universale del principio di identità a cui si connettono naturalmente tutte le operazioni possibili d'ogni calcolo.

Ciò è tanto vero che, indipendentemente dalla possibilità operativa di cui farò cenno fra poco, l'adozione del principio non tautologico implica una *semplice estensione* delle condizioni in cui le operazioni del calcolo possono compiersi attualmente, stando al carattere esclusivamente formale degli enti e delle relazioni possibili, in armonia col principio d'identità.

Dunque il principio tautologico non resta giustificato logicamente in nessuna maniera, nè come derivato nè come primitivo.

III.

Vediamo ora di renderci conto di alcune applicazioni suggerite dalla presente ricerca.

Anzitutto un doppio compito si impone:

1° sgombrare il terreno della logica deduttiva dalle proprietà extralogiche che riescono a paralizzarla;

2° sviluppare il calcolo logico in ordine alla possibilità delle nuove operazioni.

(1) G. Peano, *Super theorema de Cantor-Bernstein*. Estr. dal t. XXI (1906) dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, p. 6: « Nos cogita numero, ergo numero es ». L'importanza logica e filosofica di questo principio necessario a stabilire la purezza d'ogni calcolo e sufficiente a troncare ogni inutile disquisizione metafisica è enorme, ma non sentita a bastanza da tutti i cultori delle scienze pure.

Digitized by Google

Si capisce che il primo compito porta ad uno studio abbastanza facile.

Invece il secondo condurrà necessariamente ad un vasto campo di applicazioni intorno alle quali non sembra facile portare un apprezzamento adeguato finchè non saremo in grado di raccoglierne e di ordinarne i risultati.

Le applicazioni più elementari sembrano le seguenti:

a) in primo luogo restano modificate le definizioni del prodotto e della somma logica coll'adozione della coppia di equazioni

$$aa = a \quad , \quad a + a = a$$

esprimenti in generale proprietà analoghe a quelle della moltiplicazione e dell'addizione matematica;

b) in secondo luogo, al posto della legge di assorbimento pel prodotto si sostituisce la proprietà distributiva anche nella forma

$$a(a + b) = a^2 + ab;$$

c) in terzo luogo si rende possibile l'introduzione delle potenze e dei multipli nel calcolo logico, col doppio vantaggio di trattare in maniera più rigorosa e corretta i problemi logici già risolti per altra via, e di aprire nuovi e più vasti campi di ricerche all'analisi logica.

Ma non posso ora proseguire il racconto degli speciali acquisti conseguibili in tale ordine di idee, riservandomi di svilupparli in altro lavoro. Noterò solo che per tal modo vengono distrutte le più forti ragioni tecniche contrarie alla tesi dell'identità fondamentale dei due calcoli, perchè calcolo logico e calcolo matematico si presentano ormai come due insiemi che possiedono le medesime proprietà fondamentali; quindi, sulle traccie del RUSSELL (1), del HUNTINGTON (2) e del COUTURAT (3), è ovvio identificarli puramente e semplicemente dal punto di vista formale (4).

(1) B. RUSSELL, *The Principles of Mathematics* (t. I, Cambridge, University Press, 1903); *Sur la Logique des relations, avec des applications à la théorie des séries* (ap. Revue de Mathém. di G. PEANO, t. VII, pp. 115-147. Turin, 1902). Le magistrali ricerche del RUSSELL, compiute dal nuovo punto di vista della Logica delle relazioni e coll'impiego della Logica matematica del PEANO, costituiscono una ricostruzione logica di tutta la matematica pura. Molto opportunamente il COUTURAT nel suo prezioso resoconto, citato qui sotto nella nota (3) ne ha fatto rilevare l'importanza grandissima. Si può ripetere con lui che, grazie alle ricerche del RUSSELL il collegamento della teoria degli insiemi, scoperta da G. CANTOR e da altri matematici, al calcolo logico, è ormai un fatto compiuto.

(2) HUNTINGTON, *Note on the definitions of abstract groups and fields by sets of independent postulates* (ap. Transact. of t. American Mathem. Society, t. VI, pp. 181-193, 1905). Quest'opera contiene la dimostrazione del carattere logico della teoria dei gruppi di SOPHUS LIE, studiata dal punto di vista della Logica delle relazioni.

(3) L. COUTURAT, in *Les principes des Mathématiques* (Paris, F. Alcan, 1905) tratta profondamente e con grande chiarezza i rapporti fra la Logica e la Matematica; tutta l'opera è destinata a giustificare la tesi dell'identità fondamentale della Logica e della Matematica.

(4) Queste considerazioni ci lasciano intravedere l'utilità derivabile dall'introduzione della veduta del PLUECKER nell'apprezzamento teorico della Logica e della Matematica. Già l'ENRIQUES

Digitized by Google

***

Le cose più importanti che ho esposto in questa Comunicazione si riducono in sostanza alla dimostrazione della natura extralogica delle leggi di tautologia e di assorbimento nel calcolo logico. Ciò significa che una vera e propria dimostrazione di queste leggi finora non la possediamo e non la possederemo tanto presto; il che però non toglie il pregio dei risultati conseguiti dalla Logica matematica; soltanto ci obbliga a riconoscere che è un puro arbitrio descrittivo affermare che l'addizione e la moltiplicazione logica godano realmente delle proprietà speciali espresse dalle leggi surriferite, a differenza di quanto avviene in Matematica. Abbiamo veduto come da tale fatto risulti possibile l'introduzione nella Logica matematica di un gruppo di nuove nozioni e di nuove operazioni, universalmente respinto da LEIBNIZ ai giorni nostri, il cui retto uso è peraltro intimamente collegato con quello delle nozioni e delle operazioni fondamentali di tutti i calcoli che vanno gradatamente unificandosi sotto il cielo comune della deduzione nel senso più esteso della parola.

E ciò basti a porre in luce il molto che resta ancora da fare per tale via.

nei suoi *Problemi della Scienza* (Bologna, Zanichelli, 1906, p. 165) ha rilevato l'interesse logico e matematico di cotesta veduta che porge un principio di trasformazione delle teorie basato appunto sul loro valore formale. Allo stesso risultato si arriva utilizzando la teoria del PETROVITCH [*La mécanique des Phénomènes fondée sur les analogies* (Paris, Gauthier-Villars, Ed. 1906)] il quale presenta sotto una forma insieme abbastanza semplice e abbastanza generale il fecondo concetto della rappresentazione schematica d'un gruppo d'analogia, e colla proposta del fenomeno tipico astratto eleva lo studio dei sistemi particolari naturali e razionali alla pura ricerca delle relazioni logico-matematiche generali tra le cause e gli effetti, i principj e le conseguenze. Tutte queste teorie sono dominate dallo spirito comune della teoria dei modelli e costituiscono oramai una nuova branca della filosofia della natura e della scienza. In *Teoria della Scienza: Logica, Matematica e Fisica* (Torino, Bocca, 1903); *Logica formale dedotta dalla considerazione di modelli meccanici* (Torino, Bocca, 1906); *Del nuovo spirito della Scienza e della Filosofia* (Torino, Bocca, 1907), ho tentato di rendere famigliari in Italia l'importanza logica e filosofica e le applicazioni della moderna teoria dei modelli dovuta all'alta mente di ENRICO RODOLFO HERTZ.

Digitized by Google

Digitized by Google